RICEVIMENTO DOMANI NON LA MATTINA MA ALLE 17,45.

$T: V \to W$ applicazione lineare se

1. $T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
   $\forall v \in V$

PROPRIETÀ

<u>Proposizione</u> Se $T: V \to W$ è lineare allora $T(0_V) = 0_W$

<u>Dim</u>

perché T è lineare

$$T(0) = T(0+0) \stackrel{\text{perché } T \text{ è lineare}}{=} T(0) + T(0)$$

Dunque

$$T(0) = T(0) + T(0)$$

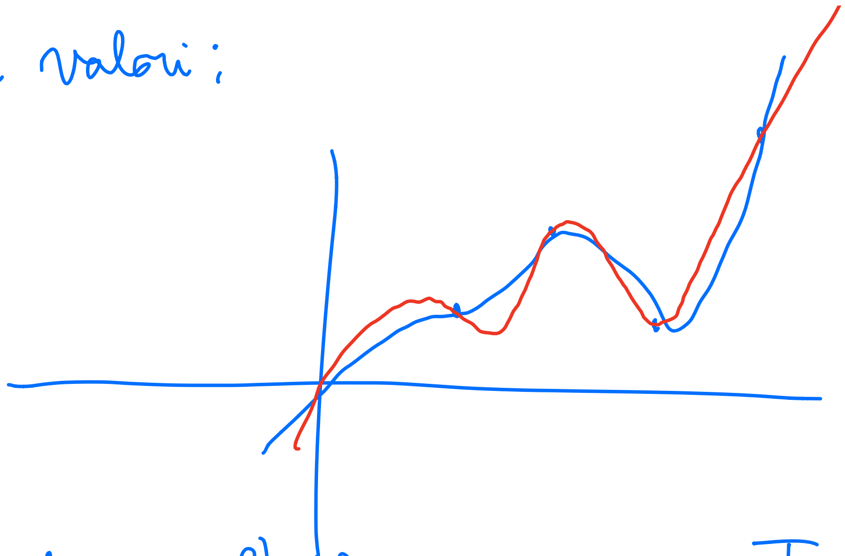
sottraggo ad entrambi i membri l'opposto di $T(0)$ e ottengo

$$0 = T(0)$$

$\square$

Un'applicazione lineare è completamente determinata dai valori $T(v_1), \ , T(v_n)$ che assume su una base $v_1, \ , v_n$ di V.

Come sapete, in generale una funzione non è determinata se conoscete un numero finito di valori:



Dimostriamo l'affermazione per T lineare.
Sia $v \in V$.
Allora posso scrivere

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \quad + \lambda_n v_n$$

in modo unico, visto che $v_1, , v_n$ è una base. Applico T e ottengo:

$$T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \quad + \lambda_n v_n) =$$

per linearità

$$= T(\lambda_1 v_1) + T(\lambda_2 v_2) + \quad + T(\lambda_n v_n)$$

$$= \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \quad + \lambda_n T(v_n)$$

ancora per linearità

Dunque per conoscere $T(v)$ basta conoscere $T(v_1), T(v_2), \quad , T(v_n)$

(e ovviamente sapere le coordinate di $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{v_1, , v_n}$)

Esempio: SIA $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare

Prendo in $\mathbb{R}^3$ la base standard $\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

e in $\mathbb{R}^2$ la base standard $\underset{\epsilon_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{\epsilon_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Supponiamo di sapere che

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Domanda: quanto vale

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{e_1, e_2, e_3} ?$$

$$\boxed{T\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}} = T\left(5e_1 + 1e_2 + 4e_3\right)$$

Infatti $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= 5e_1 + 1e_2 + 4e_3 .$$

$$T(5e_1 + e_2 + 4e_3) = 5T(e_1) + T(e_2) + $$

$$+ 4T(e_3) = \underbrace{5\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} =$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} 9 \\ 40 \end{pmatrix}}$$

Calcoliamo adesso il prodotto fra matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \underline{5 \quad 7} & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4(-1) \\ 5 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Dunque calcolare $T\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ equivale a calcolare il prodotto fra matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Che matrice è

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & \quad 3 & \quad -1 \\ 5 & \quad 7 & \quad 2 \end{pmatrix} \\ T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3) \end{array} \quad ?$$

Un altro esempio

Esercizio Sia $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare tale che

$$S(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Domanda Chi è $S\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$S(e_1)$ $\quad$ $S(e_2)$ $\quad$ $S(e_3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$S\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Viceversa se prendo una matrice

$$- \underset{\text{righe}}{\underset{\uparrow}{m}} \times \underset{\text{colonne.}}{\underset{\uparrow}{n}} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

questa determina una applic. lineare

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Esempio: la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

rappresenta l'applicazione lineare

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

tale che $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def Data $T: V \to W$ applicazione lineare chiamo nucleo di T il seguente insieme:

$$\operatorname{Ker} T = \{ v \in V \text{ tc } T(v) = 0 \}$$

Prop $\operatorname{Ker} T$ è un sottospazio vettoriale di V

Dim

(1) $0 \overset{?}{\in} \operatorname{Ker} T$ sì, visto all'inizio della lezione.

(2) Se $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} T$

vale $v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} T$?

Sì perché

$$T(v_1+v_2) \underset{\text{per linearità}}{=} T(v_1) + T(v_2) =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

allora $v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} T$

③ Se $v \in \operatorname{Ker} T$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda v \in \operatorname{Ker} T$

(verificate!).

$\square$

Esercizio (compitino 2017)

Sia $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\12\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}.$$

Calcolare Ker L.

Svolgimento: Cerco i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tali che

$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

È un sistema! Omogeneo!!

Lo risolvo con le mosse di riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questo sistema è equivalente a quello iniziale

$$x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 0$$

$\boxed{x_3 \text{ libero}}$

$\boxed{x_4 \text{ libero}}$

$$\boxed{x_2 = -8x_3 - 6x_4}$$

$$x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$

$$\boxed{x_1 = -2x_3 + 3x_4}$$

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_3+3x_4 \\ -8x_3-6x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ tc } x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tc } x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Def Data $T : V \to W$ applic. lineare

l'immagine di T si denota con

$$\text{Imm}\, T = \{ w \in W \text{ t.c. } \exists\, v \in V \text{ con } T(v) = w \}$$

Prop Sia $T : V \to W$ lineare

Allora $\text{Imm}\, T$ è un sottospazio vettoriale di W.

Dim

(1) $0_W \overset{?}{\in} \operatorname{Im} T$

Sì perché $T(0_V) = 0_W$

(2) Se $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} T$

vale che $w_1 + w_2 \overset{?}{\in} \operatorname{Im} T$

Sì infatti esiste $v_1 \in V$ tc

$T(v_1) = w_1$

e un $v_2 \in V$ tc $T(v_2) = w_2$

Ora calcolo

$$T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2) =$$
$$= w_1 + w_2$$

3 Verificatela voi.

<u>Prop</u> Sia $T: V \to W$ applic. lineare. Sia A un sottospazio vettoriale di V allora $T(A)$ è un sottospazio di W.

$$\left(T(A) = \{ T(a) \mid a \in A \} \right)$$

Dim Esercizio (dimostrazione identica alla precedente)

Esercizio di un compitino

Dato $p(x) = x+2$ in $\mathbb{R}[x]^{\leq 1}$

e data la base $q_1 = 2x+3$

$q_2 = 3x+2$ di $\mathbb{R}[x]^{\leq 1}$

Quanto vale

$$p(x) = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{q_1, q_2}$$

$$x+2 = \underline{\alpha}\,(2x+3) + \beta\,(3x+2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 2 \end{cases}$$

matrice completa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\boxed{\beta = -\frac{1}{5}}$$

$$\alpha + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} \boxed{= \frac{4}{5}}$$

Dunque la risposta è

$$p(x) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}_{q_1, q_2}$$